ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—————o0o—————

HOÀNG THÀNH

SỰ SUY GIẢM TRONG L^2 CỦA NGHIỆM YẾU CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

HOÀNG THÀNH

SỰ SUY GIẢM TRONG L^2 CỦA NGHIỆM YẾU CHO PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. Đào Quang Khải

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Đào Quang Khải**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 09 năm 2020

Tác giả

Hoàng Thành

Xác nhận
của khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn

TS. Đào Quang Khải

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, **TS. Đào Quang Khải**.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 09 năm 2020

Tác giả

Hoàng Thành

Mục lục

Lời mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Việc nghiên cứu phương trình Navier-Stokes là rất quan trọng vì nó là phương trình cơ bản nhất của cơ học chất lỏng dùng để mô tả chuyển động của chất lỏng và chất khí. Chúng có thể sử dụng để nghiên cứu thời tiết, thiết kế hình dáng động học của máy bay, ô tô, nghiên cứu chuyển động của máu, phân tích ô nhiễm, dự báo thời tiết, dòng chảy của đại dương và nhiều vấn đề trong khoa học khác. Phương trình Navier-Stokes cũng nhận được sự quan tâm rất lớn về mặt toán học thuần tuý, chúng có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng hiện đại. Mặc dù lý thuyết phương trình đạo hàm riêng đã trải qua sự phát triển to lớn trong thế kỷ 20 nhưng một số vấn đề cơ bản của phương trình Navier-Stokes vẫn chưa được giải quyết, đó là sự tồn tại và duy nhất của nghiệm cũng như dáng điệu của nghiệm. Cụ thể là cho giá trị ở thời điểm ban đầu trơn thì phương trình Navier-Stokes có tiếp tục trơn và duy nhất theo tất cả thời gian về sau không, câu hỏi này được nêu ra vào năm 1934 bởi J. Leray và vẫn chưa có câu trả lời khẳng định cũng như phủ định. Tính duy nhất của nghiệm yếu bài toán vấn còn là một câu hỏi mở.

2. Nội dung đề tài

Mục đích của đề tài là nghiên cứu dáng điệu của nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình Navier-Stokes không nén được trong không gian ba chiều

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u \cdot \nabla u - \nabla p + f \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

trong đó f được giả thiết là tiến tới 0 khi $t \to \infty$.

Luận văn này sẽ trình bày một vài kết quả nghiên cứu về sự suy giảm của nghiệm yếu Leray-Hopf trong L^2 theo thời gian khi thời gian tiến ra vô cùng, dựa trên bài báo của Maria Elena Schonbek [2].

Luận văn gồm lời mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo. Cụ thể là:

Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị*

Chương 2: *Sự suy giảm trong* L^2 *của nghiệm yếu cho phương trình Navier-Stokes*

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Các mục 1.1, 1.2 và 1.3 chương này chúng tôi tham khảo tài liệu [1], còn các mục 1.4 và 1.5 chúng tôi tham khảo các tài liệu [3] và [5].

1.1 Không gian các hàm cơ bản và hàm suy rộng

1.1.1 Một số ký hiệu

Cho Ω là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$ ta định nghĩa như sau:

$$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} | u \text{ khả vi liên tục đến cấp } k\},$$

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\Omega) | \operatorname{supp} u \text{ là tập compact}\},$$

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C^k(\Omega), C_0^\infty(\Omega) = \cap_{k=1}^\infty C_0^k(\Omega),$$

trong đó $\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}}$.

Ký hiệu: $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} | u \text{ đo được}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$ với $1 \leq p < \infty$ và

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} | ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty\}$$

trong đó

$$ess \sup |u(x)| = \inf\{K > 0 \big| |\{x \in \Omega | |u(x)| > K\}| = 0\}.$$

Ký hiệu $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \big| u \in L^p(K) \text{ với mọi tập compact } K \subseteq \Omega\}$ trong đó $1 \leq p < \infty$.